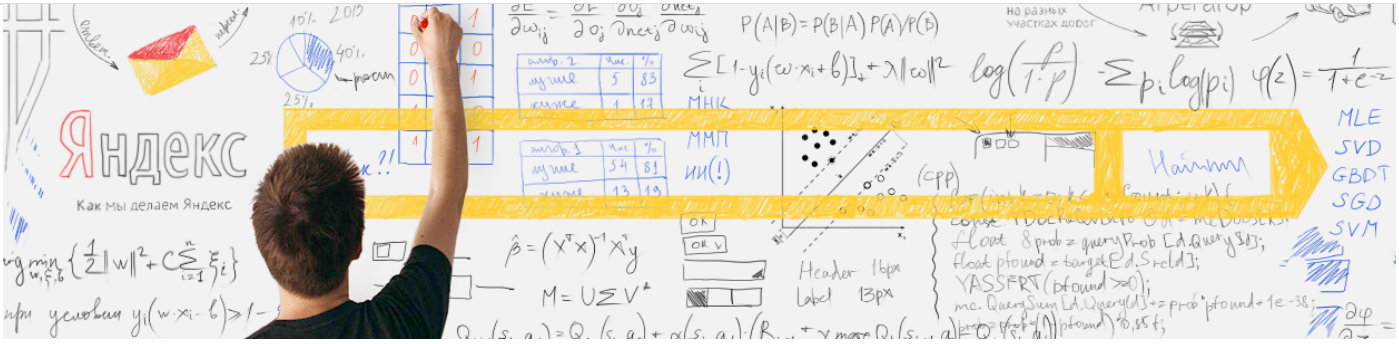


Яндекс 795,02
Как мы делаем Яндекс

12 июля 2013 в 12:08

Разбор задач финала чемпионата мира про программированию ACM ICPC 2013

Алгоритмы*, Блог компании Яндекс, Спортивное программирование*

На прошедшем неделю назад чемпионате мира по командному программированию ACM ICPC 2013 было 11 задач, одну из которых за отведё время не смогла решить правильно ни одна из команд.

Но кроме команд есть и другие люди, которые профессионально решают задачи, — аналитики чемпионата. В течение трансляции они разби на группы, распределяют задачи и потом рассказывают о них в студии. Множество зрителей следят за эфиром, пока эти ребята не разберут последнюю задачу. Кроме того, аналитики подсказывают ведущему, что происходит «на поле», высматривают интересные куски кода, следя картинкой с веб-камер участников.

В этом году на ACM ICPC был 21 аналитик из Швеции, Нидерландов, США, Словакии, Беларуси и России. И 10 из них были из Яндекса. Все о разные годы были призёрами ICPC. Специально для Хабра они разобрали все задания чемпионата.

Задача A. Self-Assembly

Одно высоконаучное химическое учреждение активно экспериментирует с Автоматическим Сборщиком Молекул. Молекулы, между которыми возможно образование химических связей, перемешивают и помещают в АСМ, где они образуют сложные молекулярные структуры. Однако возникает проблема — молекулы образуют такую большую группу, что Сборщик заедает.

Напишите программу, которая будет определять, может ли предоставленный набор молекул собираться в структуры неограниченного размер этом 1) задача ограничена плоскими структурами и 2) каждая молекула имеет вид квадрата, все молекулы имеют одинаковый размер. Четы стороны квадрата обозначают поверхности, которыми молекулы могут соединяться с совместимыми молекулами.

В каждом тесте вам будет представлен набор описаний молекул. Каждый тип молекулы описывается четырьмя парами символов — метками которые обозначают возможность соответствующей поверхности молекулы соединяться с другими молекулами.

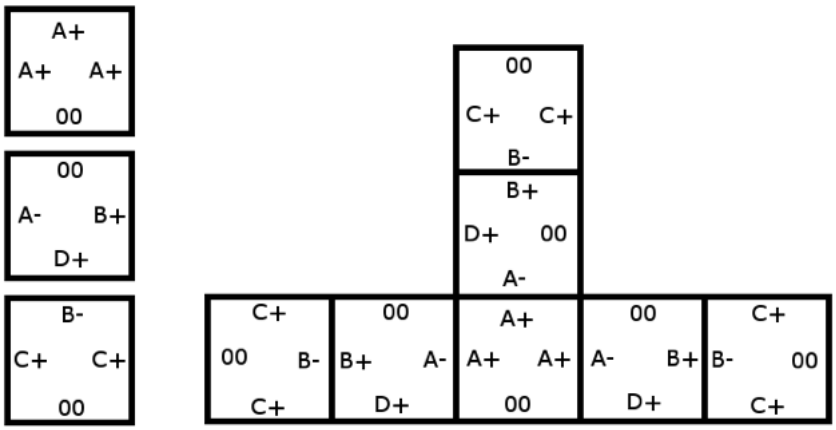
Существует два вида меток связей:

- Заглавная латинская буква (A..Z) и один из символов + или -. Две поверхности могут соединяться, если их метки связей обозначены одинаковыми буквами, но различными знаками. Например, A+ совместима с A-, но не совместима с A+ и B-.

- Два нуля 00. Метка связи 00 означает, что эта поверхность не может образовывать связь (даже с такой же поверхностью с меткой 00).

Предположим, что в Сборщике имеется неограниченное количество молекул каждого из описанных видов, которые можно поворачивать и переворачивать. При образовании молекулярных структур молекулы могут находиться рядом только, если они совместимы. Каждая поверхно молекулы при этом может быть соединена с ничем.

Рисунок показывает пример молекул трех видов и структуры ограниченного размера, собранной из них (это не единственная возможная стр для заданных типов молекул).



Входные данные. Входные данные состоят из одного теста. Каждый тест состоит из двух строк. Первая строка содержит число n ($1 \le n \le 40$ количества типов молекул. Вторая строка содержит n подстрок по 8 символов каждая — описание каждого вида молекул, причем поверхност описываются по часовой стрелке.

Выходные данные. Выведите слово unbounded, если молекулы могут создать бесконечную структуру и слово bounded в противном случае.

Решение задачи A

Автор разбора — Василий Астахов, бронзовый медалист ACM ICPC 2011 в составе команды МГУ им. М.В. Ломоносова.

> В задаче требуется понять, существует ли неограниченная молекулярная структура, в которой молекулы имеют вид квадратов с различны связями на сторонах. Учитывая доступность операций поворота и отражения, для решения задачи необходимо и достаточно было понять, существует ли цикл из молекул. Тогда, например, смещаясь все время вправо и вниз, можно было бы получить неограниченную на плоск структуру, при этом никакие связи, кроме соседних по циклу, не были бы задействованы в молекуле. Для нахождения цикла можно было построить граф, в котором вершины — это типы соединений, а ребра из типа соединения $X[+/-]$ идут во все типы соединений Y, для кото существует молекула, содержащая одновременно Y и $X[-/+]$ (парную вершину). Тогда, найдя цикл в таком графе, получим существование в исходном. Задача нахождения цикла в ориентированном графе на 52 вершинах ($A+$, $A-$, …, $Z+$, $Z-$) является несложной и может быть р например, алгоритмом построения компонент сильной связности (существование компоненты размером более одной вершины будет означ цикл).

Задача B. Hey, Better Bettor

Недавняя рецессия больно ударила по развлекательным заведениям, в том числе и по игорному бизнесу. Среди казино идет жесткая конкур и, чтобы привлечь игроков, некоторые из них стали проводить особенно привлекательные акции. Акция казино включает следующее: вы мо играть столько, сколько хотите. И после того, как вы закончите, какую бы сумму вы ни проиграли с момента начала, казино возвращает x% потерь. Естественно, если вы оказались в выигрыше, вы забираете его весь.

При этом нет ограничений ни на продолжительность игры, ни на количество денег, с которым вы вступаете в игру, но вы можете воспользов этой акцией только один раз.

Для простоты предположим, что все ставки стоят 1 доллар, а выигрыш составляет 2 доллара. Теперь допустим, что x равно 20. Если вы сдел всего 10 ставок, перед тем как закончить игру, и только 3 из них выиграют, то ваши общие потери составят 3,2 доллара. Если 6 ставок выиг то ваш выигрыш составит 2 доллара.

Даны x и p (вероятность выигрыша единичной ставки в процентах), вам требуется написать программу для определения максимального ожидаемого выигрыша, который вы можете получить, используя любую стратегию игры.

Входные данные. Входные данные состоят из одного теста, который содержит процент возврата x ($0 \le x < 100$) и вероятность выигрыша в процентах p ($0 \le p \le 50$). x и p имеют не более двух цифр после запятой.

Выходные данные. Выведите максимальный ожидаемый выигрыш с абсолютной погрешностью не более 10^{-3}.

Решение задачи B

Автор разбора — Михаил Левин, бронзовый медалист ACM ICPC 2007 года, серебряный медалист ACM ICPC 2008 года в составе команды МГУ М.В. Ломоносова.

Заметим, что решение остановить ли сейчас игру зависит только от текущего выигрыша или проигрыша игрока — история не имеет значен
Можно показать, что оптимальная стратегия в этом случае всегда имеет вид «остановиться, если на руках выигрыш *A* или проигрыш *B*», г
B — некоторые целые неотрицательные числа. При фиксированных *A* и *B* для того чтобы вычислить ожидаемую прибыль, необходимо уме
решать такую задачу: найти вероятность P(*A*, *B*) того, что игрок в какой-то момент достигнет выигрыша *A*, при этом ни разу до того не име
руках проигрыша *B* или большего. Если эта задача решена, то ожидаемая прибыль стратегии вычисляется как
$P(A,B)\cdot A+\frac{(1-P(A,B))\cdot(-B)\cdot(100-x)}{100}$, где *x*% — скидка, предоставляемая казино игроку в случае проигрыша.

Для чисел P(*A*, *B*) выполнено рекуррентное соотношение:

$$P(A,B)=p\cdot P(A-1,B+1)+(1-p)\cdot P(A+1,B-1),$$

где *p* — вероятность выигрыша при каждом броске монетки. При этом еще P(0, *A* + *B*) = 1, а P(*A* + *B*, 0) = 0. Если решить эту линейную
рекурренту порядка 2, то получим

$$P(A,B)=\frac{1-q^B}{q^A-q^B},$$

где $q=\frac{1-p}{p}$.

Если бы мы могли перебрать все возможные пары (*A*, *B*) для каждого входа (*x*, *p*), то мы бы так и сделали, а потом выбрали лучшую. Пар
бесконечное количество, но если провести несколько численных экспериментов, то можно заметить, что при возрастании *A* и *B* ожидаемая
прибыль сначала растет, а потом начинает падать (можно доказать выпуклость ожидаемой прибыли как функции от *A* и *B*), поэтому всегда
достаточно проверить лишь конечное число пар. Кроме того, можно заметить, что наилучшие значения для *A* и *B* тем больше, чем ближе *p*
а *x* — к 100. Худший возможный случай — *p* = 0.4999, *x* = 99.99. Оказывается, что в этом случае достаточно перебирать *A* до 21000, а *B* -
2500, и такого перебора достаточно, чтобы решение проходило ограничения по времени.

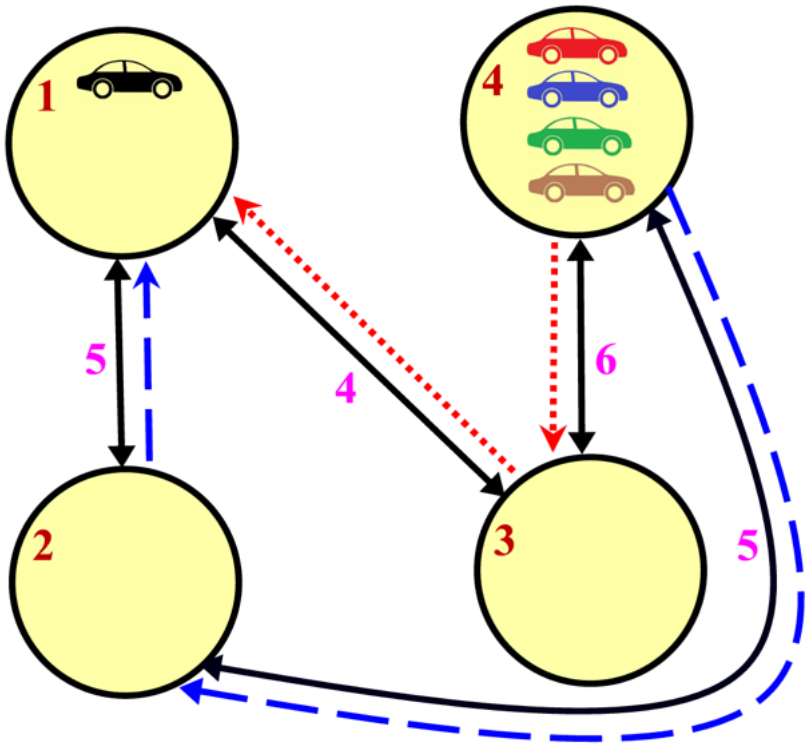
Задача C. Surely You Congest

Вы отвечаете за систему интеллектуального управления дорожным движением для новых автомобилей. Ваша цель — избежать пробок из
водителей, добирающихся из спальных районов в центр города в утренний час пик, используя информацию об устройстве города и движени
других автомобилей.

К сожалению, из-за того что водители эгоистичны, они никогда не поедут по не самому короткому из возможных путей в центр, даже если в
попросите их об этом. Вы можете только советовать им, какой из нескольких кратчайших путей выбрать.

Город состоит из перекрестков, соединенных двухсторонними дорогами, которые можно проехать за заданное время. Все водители начинают
движение на перекрестках (возможно, различных) и заканчивают на одном обозначенном как центр города перекрестке номер 1. Если два
водителя одновременно начнут движение по одной и той же дороге в одном направлении, то возникнет пробка и ваша цель будет провалена
Однако водители могут проезжать один и тот же перекресток одновременно или ехать по одной и той же дороге, въехав на нее в разное вре

Определите максимальное количество водителей, которые могут добраться в центр города без пробок, если все водители начинают свое дви
одновременно и ни один из них не поедет по неоптимальному пути.



На рисунке машины изображены в их начальном расположении. Один водитель уже находится в центре, а из машин, находящихся на 4 перекрестке, одна может двигаться вдоль пунктирной линии через перекресток 3, другая — вдоль пунктирной линии через перекресток 2, н оставшиеся две не смогут добраться до центра без пробок. Таким образом, ответ на этот тест будет 3.

Входные данные. Вход содержит один тест. Первая строка содержит три числа *n, m* и *c*, где *n* (1≤ *n*≤ 25000) — количество перекрестков, *m* (0 ≤ *m* ≤ 50000) — количество дорог в городе и *c* (0 ≤ *c* ≤ 1000) — количество водителей. Каждая из следующих *m* строк содержит три чи y_i и t_i, описывающие дорогу, где x_i и y_i (1≤ x_i, y_i ≤ n) — номера различных перекрестков, которые соединяет описанная дорога и t_i (1≤ t_i ≤ 1 — время, которое должен потратить водитель чтобы добраться от начала до конца дороги в любом направлении. Гарантируется, что можно добраться в центр с любого перекрестка. Последняя строка содержит с чисел, описывающих начальные перекрестки, на которых расположе машины.

Выходные данные. Выведите максимальное количество водителей, которые смогут добраться в центр города без пробок.

Решение задачи C
Автор разбора — Михаил Левин.

> Вычислим кратчайшие расстояния *d*(*u*) от всех вершин *u* до конечной вершины *e* при помощи алгоритма Дейкстры с кучей за O(*m* log *n*). Т все стремятся ехать только по кратчайшему пути, то машины будут ездить только по таким ребрам (*u*, *v*) в сторону от *u* до *v*, что *d*(*u*) = *d*(*l*(*u*, *v*), где *l*(*u*, *v*) — длина ребра (*u*, *v*). Построим новый ориентированный граф, состоящий только из таких ребер.
>
> Для любых двух машин, начавших двигаться одновременно и движущихся от своих исходных точек до конечной точки с одинаковой скорс разница расстояний до конечной вершины остается всегда постоянной. Поэтому две машины, начинавшие на разных расстояниях, никогда могут проехать по одному и тому же ребру одновременно. Сгруппируем все машины по расстоянию от конечной точки. Тогда для каждой г необходимо найти наибольшее количество попарно непересекающихся по ребрам путей из всех стартовых вершин до конечной вершины ориентированном графе, Эта задача решается при помощи алгоритма нахождения максимального потока в графе: добавим в граф источни проведем из него ребра во все вершины, в которых есть машины, с пропускной способностью, равной количеству машин в вершине. Все р ориентированного графа сделаем пропускной способности 1. Если найти в этом графе максимальный поток из источника в конечную верш как раз и получится максимальное количество попарно не пересекающихся по ребрам путей.
>
> Найдем максимальный поток для каждой группы вершин на одном расстоянии от конечной и сложим ответы — это и будет ответ к задаче. нахождение одного увеличивающего поток пути уходит O(*m*), а всего таких путей будет найдено не более *c*, поэтому суммарно все запуск нахождения максимального потока будут выполнены не более чем за O(*mc*). Итого сложность решения O(*m* log *n* + *mc*), что проходит в за ограничения.

Задача D. Factors

Одна из фундаментальных теорем арифметики гласит, что любое число большее 1 можно единственным образом представить в виде произве простых чисел. Однако этот уникальный набор простых множителей можно упорядочить различными способами. Например:

$$10 = 2 \cdot 5 = 5 \cdot 2 \qquad 20 = 2 \cdot 2 \cdot 5 = 2 \cdot 5 \cdot 2 = 5 \cdot 2 \cdot 2$$

Обозначим как *f(k)* количество различных способов упорядочить простые множители числа *k*. Тогда *f*(20) = 3 и *f*(10) = 2.

Вам дано целое положительное число *n*, причем гарантируется, что для любого *n* существует такое *k*, что *f(k)* = *n*. Определите такое минима *k*.

Входные данные. Во входном файле приведены не более 1000 тестов, каждый из которых записан в отдельной строке. Каждый тест состоит целого положительного числа $n < 2^{63}$.

Выходные данные. Для каждого теста выведите число n и минимальное $k > 1$ такое что $f(k) = n$. Числа в тестах выбраны таким образом, что $k < 2^{63}$.

Решение задачи D

Автор разбора — Ренат Гимадеев, золотой медалист ACM ICPC 2012 в составе команды Физтеха.

> Это довольная простая задача, у которой было много разных решений. Приведу одно из самых коротких.
>
> Заметим, что если разложить на простые сомножители $n=p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_t^{k_t}$, то количество упорядоченных представлений в виде произведения простых будет равно $\frac{(k_1 + k_2 + ... + k_t)!}{k_1!k_2!...k_t!}$. Это следует из простых комбинаторных рассуждений: упорядочить N разных простых множител можно N! способами. Если среди этих множителей есть одинаковые, то все упорядочивания, которые отличаются только порядком одинак множителей, на самом деле совпадают. Каждую группу по k_i одинаковых множителей можно переставить $k_i!$ способами. Поэтому каждая уникальная перестановка была посчитана $k_1!k_2!...k_t!$ раз и на это число надо поделить. Эта формула дает нам возможность быстро вычисл *f*(*k*), зная разложение числа *k* на простые множители.
>
> Дальше нужно заметить, что количество упорядочиваний не зависит от того, чему равны p_i и как упорядочены между собой k_i. Поэтому ес ищем минимальное число, то его надо искать среди чисел вида $n=2^{k_1}3^{k_2}5^{k_3}...$, причем $k_1 \geq k_2 \geq k_3 \geq ...$ Оказывается, что таких чисел среди чи меньших 2^{63} не так уж и много (в условии просят искать только те решения, которые меньше 2^{63}), их около 40000 и они легко генерирую рекурсией. Для каждого из них можно найти *f(k)* по описанной выше формуле и сохранять в ассоциативном массиве минимальные значен числа *k* для каждого полученного *f*(*k*). После этого каждый запрос из условия обрабатывается за время обращения к этому ассоциативном массиву.

Задача E. Harvard

Термин «Гарвардская архитектура» применима к компьютеру с физически разделенной памятью для инструкций и данных. Термин происходит от имени компьютера Harvard Mark I, созданного в 1944 году. В нем для инструкций использовалась бумажная лента, а для данных — реле.

Некоторые современные микроконтроллеры используют «Гарвардскую архитектуру», но не бумажные ленты и реле! Данные лежат в банках, каждый из которых содержит одинаковое число ячеек. Каждая инструкция обращения к данным имеет байт-смещение *f* в пределах банка и бит *a*, который используется для определения номера банка. Если *a* равно 0, то обращение происходит к банку с номером 0. Если a равно 1, то номер банка хранится в специальном регистре выбора банка (РВБ).

Например, пусть у нас есть 4 банка с 8 ячейками каждый. Обратиться к ячейке с номером 5 можно двумя способами: одной инструкцией с *a* = 5 или двумя инструкциями, установив значение РВБ равным 0 и затем использовав инструкцию с *a* = 1 и *f* = 5. Очевидно, что первый спос быстрее, ибо не нужно присваивать значение РВБ. Теперь предположим, что нужно обратиться к ячейке 20 в той же памяти. Сейчас примен только один способ: выполнить инструкцию, установив значение РВБ 2 (если в нем уже не хранится нужное значение), и затем инструкцию и *f* = 4. Программа представляет собой последовательность операций. Каждая операция это:

- обращение к переменной, записывается как *Vi*, где *i* — положительное целое число;
- повторение, записывается как *Rn E, где n — положительное целое число, а* `— произвольная программа, эта операция эквивалентна выполнению программы n раз.`

  Задача состоит в определении минимального времени выполнения программы. А именно, зная количество и размер банков, а также им программу, требуется определить минимальное количество инструкций 1(обращения к ячейкам и, возможно, установки значения РВБ) необходимое для выполнения программы. Для этого вам требуется ассоциировать переменные с ячейками памяти и среди всех отобра определить то, которое минимизирует число инструкций. Нужно выдать само это число. Обратите внимание, что значение РВБ до перво присвоения не определено.

  Входные данные. Содержат один тест, состоящий из двух строк. В первой *b* и *s* — количество и количество переменных, которое можно хранить в банке. Вторая строка содержит непустую программу с не более чем 1000 элементами (каждый из *Rn*, *V i* и *E* считается за оди элемент).

  Можно предполагать, что:

- в повторении *Rn*, n удовлетворяет $1 \le n \le 10^9$;
- тело повторения `Rn E не пусто;`
  `в обращении к переменной Vi, i удовлетворяет 1 ≤ i ≤ min(bs; 13);`
  `общее число обращений к переменным в программе не превосходит` 10^{12}.

Выходные данные. Выведите одно число — минимальное число инструкций, необходимое для выполнения программы.

Решение задачи E
Автор разбора — Станислав Пак, золотой медалист ACM ICPC 2009 в составе команды Саратовского государственного университет

> Можно сделать наблюдение, что интересных отображений множества переменных на ячейки банков данных достаточно немного чтобы их все перебрать. А именно (ячейки, задействованные в отображении, будем называть заполненными, аналогично банки все их ячейки заполнены):
>
> 1. Можно считать, что нулевой банк заполнен, если есть другой банк с заполненной ячейкой, потому что обращение к нулев банку бесплатно.
> 2. Банки с номерами больше нуля идентичны, поэтому можно полагать, что минимальные номера переменных, отображенны ячейки этих банков, упорядочены, например, по возрастанию.
> 3. Можно считать, что суммарное количество заполненных ячеек в двух любых банках больше *s*.
>
> С учетом отсечений 1 — 3 и ограничений входных данных интересных отображений около $3 \cdot 10^6$.
>
> Так как обращение к нулевому банку бесплатно, то можно убрать из программы переменные, отображенные на этот банк. Для пары оставшихся переменных *i* и *j* можно предпросчитать C_{ij} — стоимость операции обращения к переменной *j* после обращени переменной *i*, после чего остается смоделировать работу программы.

Задача F. Low Power

Вы проектируете продвинутые чипы для вычислительных машин. Производство чипов просто и поставлено на рельсы, однако про вызывают источники питания, так как доступные батареи имеют различные выходные мощности.

Представьте, что у нас есть n машин с двумя чипами на каждой, а каждый чип питается от *k* батарей. Удивительно, но не имеет значения, сколько энергии потребляют чипы, однако важно, чтобы выходные мощности чипов как можно меньше отличались друг друга, так как в этом случае машина работает наилучшим образом. Выходная мощность чипа — это минимальная выходная мощно среди всех *k* батарей в чипе. Вы располагаете *2nk* батареями, которые вам необходимо распределить по чипам машин. Может ока что нет способа распределить батареи так, чтобы выходные мощности чипов были равны для всех машин. Тем не менее, вам нужн минимизировать разность мощностей. Подробнее, вы хотите гарантировать вашим заказчикам, что разность выходных мощностей во всех машинах не превосходит *d*, при этом стараясь минимизировать *d*. Для этого вам нужно найти оптимальное распределение батарей по чипам.

Входные данные. Состоят из одного теста, содержащего две строки. В первой строке два числа *n* и *k* ($2nk \le 10^6$), во второй *2nk* ц чисел p_i ($1 \le p_i \le 10^9$).

Выходные данные. Выведите минимальное *d* такое, что существует распределение батарей по чипам, чтобы разность выходных мощностей чипов в каждой машине не превосходила *d*.

Решение задачи F
Автор разбора — Станислав Пак.

> Эта задача одна из простых. Нужно из 2*nk* выбрать *n* пар (назовем их представителями) батареек, каждая из которых имеет минимальную мощность на своем чипе, чтобы максимум разности выходных мощностей батареек в паре был минимален. Предположим, что зафиксировано *d*, тогда можно узнать, существуют ли представители такие, что максимум не превосходит *d*. Отсортируем мощности $p_1 \le p_2 \dots \le p_{2nk}$ и будем жадно набирать пары: в первую пару попадут батареи p_1 и p_2. Если $p_2 - p_1 >$ представителей выбрать нельзя. Во вторую пару возьмем батареи (p_{i2}, p_{i2+1}) с разностью не больше *d* и минимальным индексо $2k + 1$, если это возможно. Аналогично в третью пару — (p_{i3}, p_{i3+1}), $i3 \le 4k + 1$.
>
> Если с помощью этого алгоритма не удается набрать *n* пар, то этого сделать нельзя. Ответ найдем бинарным поиском.

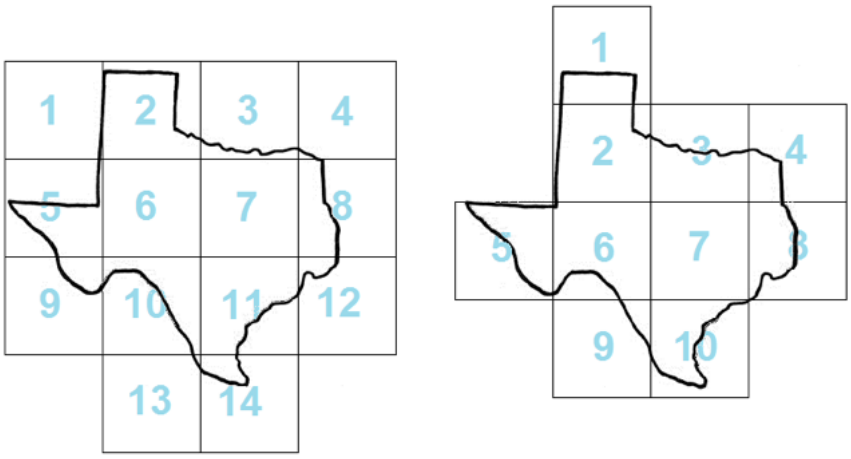
Задача G. Map Tiles.

Это задача, которую в отведённое время не смогла решить правильно ни одна из команд.

Печать карт — сложная задачка. Сначала нужно найти подходящее преобразование, чтобы уместить карту сферической земли на плоскости, потом оказывается, что для печати высококачественных карт нужно использовать несколько листов бумаги, потому чт один они не помещаются. Чтобы преодолеть эту трудность, издатели карт разбивают карту на несколько прямоугольных частей и печатают каждую часть отдельно. Именно в этом процессе вы примете участие в этой задаче.

Международная ассоциация издателей карт старается сократить расходы на печать карт минимизируя количество отдельных лист используемых для печати карт. Даже со стандартным размером листов и масштабом карты можно оптимизировать расход листов, подстраивая их расположение.

В левой части рисунка показаны 14 листов, покрывающие область. В правой части показано, как ту же область можно покрыть вс листами, не изменяя ориентацию области, размер листов и масштаб.



Два разных способа разложить по листам Техас

Ваша задача — помочь Международной ассоциации издателей карт найти минимальное количество листов, необходимое для покр заданной области. Для простоты область является замкнутым многоугольником без самопересечений.

Обратите внимание, что все листы должны являться частями непрерывной решетки, со сторонами параллельными горизонтали и вертикали. Листы могут касаться только своими сторонами полностью и не могут быть повернуты. Кроме того, хотя все заданные координаты являются целочисленными, листы могут быть расположены в нецелочисленных координатах.

Многоугольник может касаться сторон листов (как в примере 2). Однако, для того чтобы избежать проблем с машинным представл рациональных чисел, можно предполагать, что ответ не изменится если вершина многоугольника будет находиться снаруди листа расстоянии 10^{-6}.

Входные данные. Вход состоит из одного теста. В первой строке теста записаны три числа n, x_s и y_s. Количество вершин многоугс n ($3 \le n \le 50$), x_s и y_s ($1 \le x_s, y_s \le 100$) — размеры листов, которыми нужно покрыть картую. Каждая из следующих n строк содер два целых числа x и y ($0 \le x \le 10x_s$, $0 \le y \le 10y_s$), описывающих вершину многоугольника (в направлении обхода либо по часов либо против часовой стрелки).

Выходные данные. Выведите минимальное количество листов, необходимых для покрытия многоугольника.

Решение задачи G

Автор разбора — Яков Длугач, золотой медалист ACM ICPC 2012 в составе команды Физтеха.

> Решение этой задачи разбивается на две части: генерацию вариантов расположения многоугольника и подсчёт количества занимаемых клеток для каждого из вариантов расположения.
>
> Генерация вариантов
>
> Заметим, что если мы нашли некоторое решение, то его можно «подвинуть», пока многоугольник не упрётся в сетку (то есть дальнейшее движение может изменить набор выбранных клеток). Фактически есть несколько случаев, когда многоугольник уп в сетку:
>
> - одна из вершин многоугольника попадает на линию сетки;
> - одно из рёбер многоугольника натыкается на узел сетки.
>
> При выполнении одного из этих условий у многоугольника всё ещё остаётся некоторая степень свободы:
>
> - в случае попадания вершины на линию сетки можно двигать многоугольник вдоль этой линии;
> - в случае попадания ребра на узел сетки можно двигать многоугольник вдоль ребра.
>
> Заранее оговоримся, что сдвиги, отличающиеся по каждой из координат на число, кратное шагу сетки, мы будем считать равнь
>
> Поэтому фактически есть три варианта выбора «упора», чтобы положение многоугольника относительно сетки задавалось однозначно.

1. Одна из вершин попадает на вертикальную линию сетки, и одна из вершин попадает на горизонтальную линию сетки. Сю входит случай, когда одна вершина попадает в узел сетки. То есть упор однозначно задаётся парой вершин, итого вариан n^2.
2. Одна из вершин попадает на горизонтальную или вертикальную линию сетки. Без потери общности будем считать, что эта сетки — вертикальная и задаётся уравнением $x = 0$.
   Пусть теперь одно из рёбер, не являющееся вертикальным, попадает на узел. Для выбора сдвига достаточно выбрать абсц этого узла, а это можно сделать не более чем $m + 1$ способами. За m обозначено число 10. Итого вариантов — $n^2(m + 1)$.
3. Два непараллельных ребра упираются в узел сетки. Тут для определения сдвига многоугольника помимо рёбер нужно зафиксировать «разность» между теми узлами сетки, в которые упираются эти рёбра. Итого — $n^2(m + 1)^2$ вариантов.

В результате получаем в худшем случае $O(n^2m^2)$ вариантов выбора сдвига многоугольника. Поскольку для каждого из вариант затем нужно будет подсчитать количество занятых клеток, нужно, сгенерировав список всех вариантов, вычистить из него дубл говорят, что это помогало уменьшить количество вариантов в «максимальных» тестах в 3 — 5 раз.

Стоит заметить, что многие команды забывали рассматривать некоторые из этих трёх случаев (большинство команд останавлив только на рассмотрении первого).

Подсчёт занимаемых клеток

Вторая сложность в этой задаче состояла в том, чтобы эффективно вычислить количество занимаемых клеток по заданному сдв Наивный способ подсчёта — для $(m + 1)^2$ клеток проверить наличие пересечения с многоугольником — работает за $O(m^2n)$ и н укладывается в ограничение по времени. Оказывается, что эффективнее будет считать количество занятых клеток в каждом из столбцов. Для этого нужно рассмотреть непрерывные куски границы многоугольника, проходящие через столбец: либо кусок гр «пересекает» столбец (один конец куска — на правой границе столбца,
а другой конец — на левой), либо оба конца куска находятся на одной границе столбца. Можно доказать, что куски первого ти разбиваются на пары, причём все клетки между этими кусками будут заняты. После этого к полученным клеткам нужно добави клетки, через которые проходят куски второго типа. Этот метод можно реализовать за $O(m(m + n)) = O(mn)$.

Итоговая сложность алгоритма для этой задачи — $O(n^3m^3)$.

Задача H. Матрёшка

Матрёшкой называют набор традиционных русских деревянных кукол уменьшающегося размера, помещенных внутрь друг друга. Матрёшку можно открыть, чтобы достать изнутри меньшую матрёшку, у которой, в свою очередь, внутри также есть матрёшка и так далее.

В Национальном Матрёшечном музее недавно проходила выставка матрёшек, на которой были представлены похожие по стилю, но отличающиеся количеством матрёшек в наборе куклы. С сожалению, один шаловливый (и оставленный без присмотра) ребенок разобрал все матрёшки и выставил все куклы в ряд.

В ряду оказалось n матрёшек, про каждую известен её целочисленный размер. Вам нужно заново собрать все матрёшки в наборы, однако вы не знаете ни изначальное количество наборов, ни количество кукол в к из наборов. Вы знаете только то, что каждый набор состоит из кукол всех последовательных размеров от 1 до некоторого m, прич может быть различным для различных наборов.

При сборке наборов нужно руководствоваться следующими правилами:
- можно поместить матрёшку только внутрь матрёшку большего размера;
- можно объединить две матрёшки только если они стоят рядом в ряду;
- после того как матрешку помещают внутрь набора матрешек, ее нельзя переместить в другую группу матрешек или отделить группы матрешек. Разрешается только временно разделить ее при объединении двух групп матрешек.

Ваше время очень ценно, поэтому вы хотите собрать все матрешки в группы как можно быстрее. Единственная часть процесса, ко занимает время, это открытие и после этого закрытие куклы, поэтому вы хотите минимизировать количество именно таких действ Например, минимальное количество действий для объединения группы [1,2,6] и [4] — два, сначала нужно открыть матрешки разм и 4. Объединение групп [1,2,5] и [3,4] требует трех открытий.

Напишите программу, которая вычислит минимальное количество открытий, необходимых для сборки всех наборов матрешек.

Входные данные. Вам дан один тест, состоящий из двух строк. Первая строка содержит одно число n ($1 \le n \le 500$) — количество отдельных кукол в изначальном ряду. Во второй строке находится n чисел, описывающих размер каждой куклы в ряду. Размер ка куклы не менее 1 и не превосходит 500.

Выходные данные. Выведите минимальное количество открытий матрешек, необходимое для того, чтобы собрать все наборы. Есл сборка невозможна (ребенок мог забрать несколько кукол себе), выведите слово impossible.

Решение задачи H

Автор разбора — Алексей Ропан, бронзовый медалист ACM ICPC 2012 в составе команды Белорусского государственного универси информатики и радиоэлектроники.

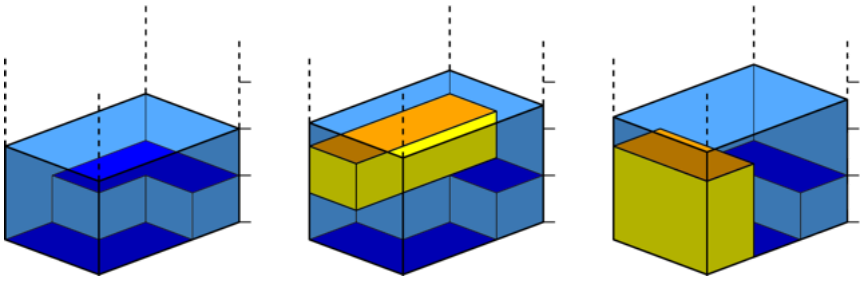
> Давайте скажем, что значение F_i — это минимальное количество открытий матрёшек, которые нужно сделать для того, чтобы ра первые *i* матрешек по группам. Тогда $F_0 = 0$ и $F_i = \min_{0 \le j < i} F_j + G_{j+1,i}$, где значение $G_{l,r}$ — это минимальное количество открыти которое нужно сделать, чтобы сложить матрёшки с *l* по *r* включительно в одну (нумерация матрешек с единицы), и на интервал *j* + 1 до *i* включительно все размеры матрёшек различные и не превышают *i* − *j*. Тогда ответ на задачу будет F_n, а сложность ре без учета вычисления значений *G* будет $O(n^2)$. Для $G_{i,i}$ значение всегда равно 0, а для $G_{i,j}$ и i < j на последнем этапе происходи объединение двух групп матрёшек. Пусть *k* — это номер матрёшки, на которой заканчивается левая группа. Тогда $G_{i,j} = \min_{i \le k}$ $G_{k+1,j} + C_{i,k,j}$, где значение $C_{i,k,j}$ — это минимальное количество открытий матрёшек, которое потребуется для того, чтобы объе группы матрёшек с *i*-й по *k*-ю и с *k*+1-й по *j*-ю. Пусть значение $M_{i,j}$ — это минимальный размер матрёшки на интервале от *i* до *j* значение $K_{i,j,s}$ — количество матрёшек на интервале от *i* до *j*, размеры которых меньше *s*. Тогда $C_{i,k,j}$ можно посчитать как *j* − *i* *t*, где *t* — это количество матрёшек, которые при объединении не будут открыты, то есть $t = K_{k+1,j,M_{i,j}} + K_{i,j,M_{k+1,j}}$ (можно замети одно из слагаемых всегда будет равно нулю). Сложность вычисления *K* и *G* равна $O(n^3)$.

Задача I. Pirate Chest

Пират Джек устал от битв, мародерства, воровства и угнетения всех и вся в открытом море. Он решил уйти на пенсию, и даже нац идеальный необитаемый островок в океане, на котором он достойно проведет остаток жизни, если у него, конечно, не закончатся деньги. Сейчас у него много золотых монет, которые он хочет сложить в сундук (он же в конце концов пират!). Джек может постр сундук в форме прямоугольного параллелепипеда с целочисленными сторонами и не превышающими заданный размерами дна су Осталось лишь найти, куда спрятать сундук с сокровищами.

Джек решил затопить сундук в тенистом пруду. Поверхность пруда представляет собой прямоугольник с заданными сторонами, пр всех сторон окружен вертикальными каменными берегами. Джек исследовал дно пруда и знает про каждый квадрат 1x1 пруда (в декартовой системе координат) глубину пруда в этом месте. Когда Джек утопит сундук, последний утонет на максимально возмож глубину до тех пор, пока не коснется дна хотя бы одним квадратом. Из-за утопленного сундука уровень воды в пруду поднимется Берега пруда достаточно высоки, чтобы вода никогда не вылилась за его границы. Разумеется, так как сундук нужно спрятать, он должен полностью находиться ниже уровня воды в пруду. Ваша задача — найти максимальный объем сундука, который можно сп в пруду.

На рисунке слева показан пруд без сундука, по центру — пруд в котором находится сундук объема 3, справа — сундук объема 4 (максимально возможного) в пруду. Обратите внимание, что если бы сундук с центрального рисунка был сделан на единицу боль высоты, то его верх был бы виден ровно на поверхности пруда.



Входные данные. Вход содержит один тест. Тест начинается со строки, содержащей четыре целых числа *a*, *b*, *m*, *n* ($1 \le a,b,m,n \le$ Размеры поверхности пруда — *m* x *n*, максимальный размер дна сундука — *a* x *b*. Кроме того, *a* и *b* достаточно, сундук никогда не покроет весь пруд полностью. Каждая из оставшихся m строк входа содержит *n* чисел d_{ij}, описывающих глубину пруда в квадрате координатами *(i,j)*, где $0 \le d_{ij} \le 10^9$ для любого $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$.

Выходные данные. Выведите максимальный объем сундука с целочисленными сторонами, который можно спрятать в пруду под поверхностью воды, причем одно из измерений дна должно не превышать *a*, а другое — не превышать *b*. Если ни один сундук нел спрятать под водой, то выведите 0.

Решение задачи I

Автор разбора — Василий Астахов.

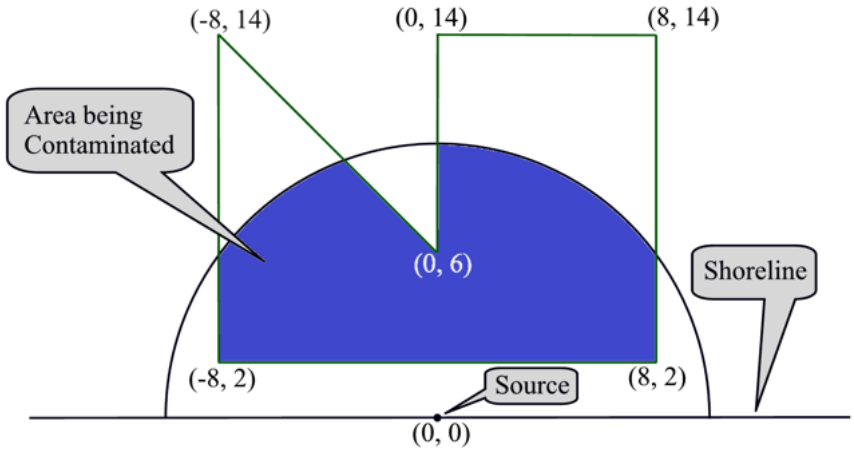
> Для начала заметим, что если у нас есть участок дна размером $h \cdot w$, глубиной хотя бы *d*, то мы можем положить туда сундук об $V = \frac{h \cdot w \cdot d \cdot S}{S - h \cdot w}$, где S — площадь всего пруда. Отсюда получаем, что чем больше h · w, тем больший объем сундука мы мож погрузить, при фиксированном *d*. Перейдём теперь к решению задачи. По сути нам нужно проверить все прямоугольники (разм не превосходящем (*a*,*b*)) найти у них минимальную глубину дна, найти объем по формуле и выбрать максимум.
>
> Но такое решение будет работать слишком долго. Для ускорения работы, мы зафиксируем только x_0 и x_1 координаты прямоугол ($x_0 < x_1$, $x_1 - x_0 \le b$). Таким образом, мы имеем дело с полосками, идущими от x_0 координаты до x_1. Посчитаем на каждой из них минимальную глубину (это можно сделать например препроцессингом за n^3). Теперь заметим, что если $w = x_1 - x_0 \le a$, то имеем ограничение на длину по *y b*, иначе длина по у меньше или равна *a*. Теперь задача свелась к одномерной: нам нужно найти та отрезок (с указанным ограничением на его длину *h*), чтобы значение объема было максимальным. Отсортируем глубины всех о

начиная с максимальной. Введем двусторонний список индексов по оси *y*. По ходу действия алгоритма мы будем рассматривать индексы, начиная с максимальной глубины, а после обработки удалять их из списка.

Так для каждого элемента мы будем знать номер ближайшего слева и справа элементов с меньшей глубиной (в плане индекса в массиве отсортированных глубин), чем уже отработаны. Таким образом, весь отрезок между ними имеет глубину ≥ текущей обрабатываемой. Значит, найдем минимум между его длиной и ограничение на длину отрезка и сравним с наилучшим ответом п формуле для объема. Таким образом, время работы алгоритма $O(n^2 \cdot m \cdot \log m)$, где log берется из сортировки.

Задача J. Pollution Solution

Будучи сотрудником отделения природопользования и охраны окружающей среды, вы должны следить за отходами, которые сбрасываются (иногда случайно, иногда специально) в реки, озёра и океаны. Одна из ваших задач — измерение влияния загрязн на различные водные экосистемы, такие как коралловые рифы, места нереста и так далее.



Модель, которую вы используете при анализе, изображена на рисунке. Береговая линия (горизонтальная линия на рисунке) лежи оси *x*, источник загрязнения расположен в начале координат (0, 0).
Распространение загрязнения в воду представляется полукругом, а многоугольник означает интересующую вас экосистему. Вам требуется определить площадь экосистемы, которая подверглась загрязнению, то есть площадь тёмно-синей области на рисунке.

Входные данные. Вход содержит один набор тестовых данных. Тест начинается строкой, содержащей два целых числа *n* и *r*, где 3 100 — это количество вершин многоугольника, 1 ≤ *r* ≤ 1000 — это радиус поля загрязнения. Следом идут *n* строк, каждая содерж два целых числа x_i и y_i — координаты вершин многоугольника в порядке против часовой стрелки, причём −1500 ≤ x_i ≤ 1500 и 0 ≤ 1500. Многоугольник не имеет самопересечений и самокасаний. Никакая вершина не лежит на окружности.

Выходные данные. Выведите площадь части многоугольника, которая попадает в полукруг с центром в начале координат радиуса Дайте ответ с абсолютной погрешностью не более 10^{-3}.

Решение задачи J
Автор разбора — Сергей Соболь, серебряный медалист ACM ICPC 2012 в составе команды Белорусского государственного универс

Это геометрическая задача с незамысловатым условием: требуется вычислить площадь пересечения полукруга и многоугольни заданных на плоскости.

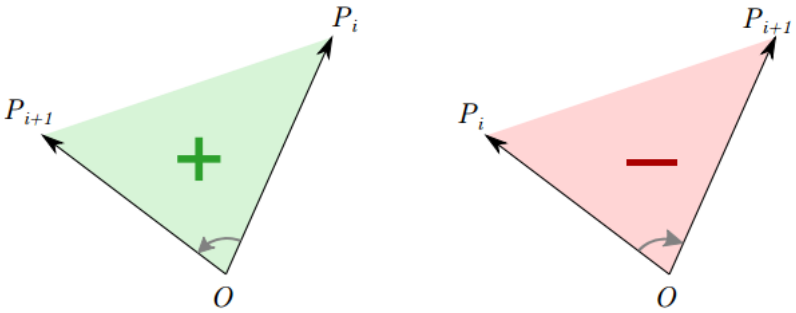
Рассмотрим вначале удобный способ вычисления площадей произвольных простых многоугольников (без самопересечений, но обязательно выпуклых). Пусть *O* — начало координат, а многоугольник задаётся *n* точками P_1, P_2, …, P_n в порядке обхода, кото можно отождествить с *n* двумерными радиус-векторами (x_i, y_i). Для простоты записи формул будем полагать, что $P_{n+1} = P_1$. Тог площадь фигуры выражается формулой

$$\left| \sum_{i=1}^{n} S(OP_iP_{i+1}) \right|,$$

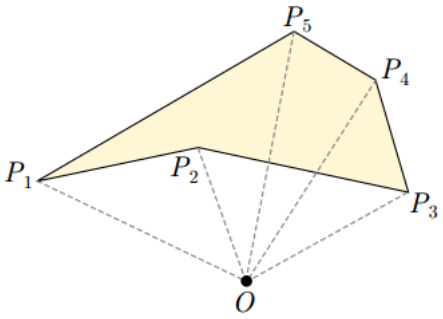
где $S(O\,P_i\,P_{i+1})$ — ориентированная площадь треугольника с вершинами *O*, P_i и P_{i+1}:

$$S(OP_iP_{i+1}) = \frac{1}{2}(x_iy_{i+1} - x_iy_{i+1}).$$

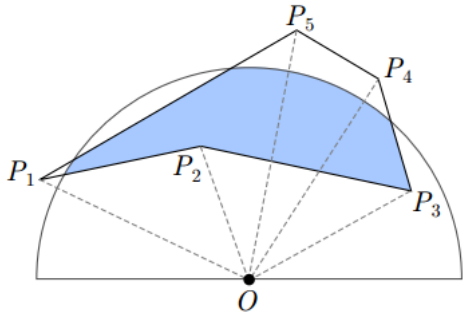
Эта величина по модулю равна площади треугольника, а знак её зависит от относительного расположения точек:



Когда суммируются все *n* таких значений, площади «лишних» частей треугольников, лежащих вне многоугольника, взаимно уничтожаются и остаётся лишь искомая площадь многоугольника, итоговый знак которой зависит от порядка обхода точек (по стрелке или против).



Вернёмся к нашей задаче. Заметим, что вместо полукруга можно рассматривать и целый круг, при этом ничего не поменяется, что многоугольник всегда лежит в верхней полуплоскости. Воспользуемся той же идеей: будем по очереди пересекать каждый треугольник OP_iP_{i+1} с кругом и суммировать площади, которые получаются, с учётом ориентации.



Как найти площадь пересечения одного такого треугольника и заданного круга? Сначала стоит найти точки пересечения отрезка P_iP_{i+1} с окружностью. Это можно делать разными способами.

- Каждая точка отрезка имеет вид $t\ P_i + (1 - t)\ P_{i+1}$ при некотором t из $[0, 1]$ (параметрическое уравнение отрезка). Можно расписать расстояние от точки до начала координат в зависимости от t, приравнять его к радиусу окружности и решить квадратное уравнение.
- Исходя из чисто геометрических соображений можно придти к более красивым результатам.

Легко видеть, что отрезок может иметь с окружностью одну (как P_1P_2 и P_3P_4 на рисунке), две точки пересечения (P_5P_1) или не ни одной (отрезки P_2P_3 и P_4P_5).

Область пересечения круга и каждого из треугольников OP_iP_{i+1} тогда разобьётся на отдельные треугольники и сектора (наприм треугольника OP_5P_1 это будут два сектора и треугольник). В решении придётся сделать разбор случаев (по сути все они изобра на рисунке), что не очень приятно, но в целом не сложно. Для площадей треугольника и сектора есть общеизвестные формулы

Таким образом, задача решается за время $O(n)$.

Задача K. Up a Tree

Анатолий — типичный студент во многих смыслах. Всякий раз он пытается копипастить код вместо написания с нуля. Такой подхо неизбежно доставляет ему проблемы. Например, когда он впервые познакомился с разными порядками обхода бинарных деревье pre и in и получил код pre-обхода с вызовом функции вывода вершины output, он просто скопировал код, перенес вызов output в правильное место и переименовал функцию. Однако он забыл переименовать функции в теле обхода, получив неправильные фун обходов.

Пример кода и результат копипасты с правками.

```
void prePrint(TNode t)
{
    output(t.value);
    if (t.left != null)
        prePrint(t.left);
    if (t.right != null)
        prePrint(t.right);
}
void inPrint(TNode t)
{
    if (t.left != null)
        prePrint(t.left);
    output(t.value);
    if (t.right != null)
        prePrint(t.right);
}
void postPrint(TNode t)
{
    if (t.left != null)
        prePrint(t.left);
    if (t.right != null)
        prePrint(t.right);
    output(t.value);
}
```

И тут Анатолий проявил себя не как типичный студент — он стал тестировать свой код! К сожалению, когда он увидел, что функц работаю неправильно, он стал вести себе как обычный студент снова. Он стал паниковать и случайным образом переименовывать вызовы функций во всех трех обходах, надеясь, что они начнут работать правильно.

Преподаватель Анатолия тестировал его код на случайных деревьях с символами в вершинах. Когда она посмотрела на выходные данные программы, то поняла, что случилось. Тем не менее, вместо того, чтобы посмотреть код, она попробовала восстановить ко его выводу. Для этого она сделала справедливые предположения:

- команда вывода символа находится на правильном месте, например, между вызовами функций в inPrint обходе;
- среди всех 6 рекурсивных вызовов ровно по два вызова inPrint, prePrint и postPrint, возможно, стоящих в неправильных мест

Вскоре преподаватель поняла, что восстановление кода Анатолия и тестового дерева по выводу программы не такая простая зада что результат может быть неоднозначным. Вам предстоит помочь ей найти все возможные реконструкции кода Анатолия. Вдобаво каждого восстановленного кода необходимо найти лексикографически наименьшее дерево по выходным данным программы.

Входные данные. Состоят из одного теста, содержащего три строки — выходные строки функций соответственно prePrint, inPrint и postPrint. Строки имеею одинаковую длину n ($4 \le n \le 26$), все символы каждой из строк различны.

Выходные данные. Для каждого восстановления в отдельную строку выведите 6 слов из множества {Pre, In, Post} — префиксы им функций в теле prePrint в порядке следования в коде, имена функций в теле inPrint и, наконец, postPrint. Далее, в трех остальных строках выведите результаты правильных prePrint, inPrint, postPrint функций на тестовом дереве, на котором эти результаты лексикографически минимальны, то есть результат prePrint минимально возможный, среди всех таких деревьев, такое, на которо результат inPrint минимален.

Решение задачи K
Автор разбора — Егор Куликов, бронзовый медалист ACM ICPC 2007 года в составе команды МГУ им. М.В. Ломоносова.

> Давайте для начала переберём вариант расстановки вызовов функций. Таких вариантов всего 90. Пусть расстановка вызовов фиксирована. Далее мы можем посчитать ответ динамическим программированием. В качестве состояния возмём $S(f_1, f_2, f_3, s_1, l)$ — существует ли дерево, которое, если его напечатать функцией f_i, будет подстрокой i-й строки входных данных, начинающе позиции s_i и имеющей длину l, и если да — то найти такое дерево с лексикографически минимальной префиксной записью, а ес таких несколько — с лексикографически минимальной инфиксной записью.
>
> В каждой позиции мы можем просто перебрать число вершин в левом поддереве текущего поддерева, таким образом время раб динамического перехода $O(n^2)$.
>
> Теоретически существует $3^3 n^4$ возможных положений, но так как для положительного ответа набор букв в каждой подстроке д совпадать, то содержательных позиций не более $3^3 n^2$, при $n \le 26$ это легко укладывается в ограничения по времени и памяти.

Конечно, это не единственный существующий разбор задач ACM ICPC 2013, есть и другие. Например, можете посмотреть на разбо
который опубликовал доцент Королевского технологического института Швеции Per Austrin (на английском). В разные годы он та
бывал и участником, и судьёй ICPC. Оригиналы задач вы можете найти здесь.

acm icpc, acm-icpc, world finals, разбор задач

Комментарии (13)

anton 12 июля 2013 в 13:27 +

G в разборе не кажется настолько сложной, какой казалась по итогам самого чемпионата. Всегда так.

pehat 12 июля 2013 в 14:13

С учетом того, что ее надо было закодить меньше, чем час, не все так просто)

anton 12 июля 2013 в 15:41

Я потому и написал «всегда так» :)

Zver1992 12 июля 2013 в 17:17

А что в задаче I нужно сортировать?
Вроде же всё просто, свели к одномерной, решили одномерную за линию, O(n*n*m), в дорешке заходит.

Zver1992 12 июля 2013 в 17:20

А что в задаче I нужно сортировать?
Вроде же всё просто, свели к одномерной, решили одномерную за линию, O(n*n*m), в дорешке заходит.
Туплю, там одномерная за m*lg(m) зачем-то решается, можно же со стеком за линию :(

EgorK 15 июля 2013 в 16:07 +

Да, можно решать одномерную и стеком за линию, но и решение с сортировкой проходило на финале.

ttools 13 июля 2013 в 14:55 -

Задача B не нравится. Что такое «стратегия игры» (чем управляет игрок) из условий непонятно, а становится из разбора. Разбор тоже непонятен. Почему надо
вероятность когда вопрос «определения максимального ожидаемого выигрыша». Что это означает также непонятно, я бы скорее решил, что это мат. ожидание
зависимости от каких-то параметров «стратегии»

EgorK 15 июля 2013 в 16:07 +

Игрок в любой момент может остановиться и забрать выигрыш, либо отдать часть проигрыша казино. Больше он не управляет ничем. Ожидаемый выигрыш
заданной стартегии — это и есть мат. ожидание выигрыша при заданной стратегии, возможно, недостаточно четко написали это. А раз мы считаем мат. ожи
чего-то, то логично, что в подсчетах участвуют вероятности различных возможных исходов.

ttools 15 июля 2013 в 22:55

1) «максимальный ожидаемый выигрыш». Первое, что я подумал, это сколько заработает игрок если ему предельно везет и все его ставки выигрывают. К как нет ограничений, вряд ли это имеется ввиду, значит, видимо, мат. ожидание, но уже есть неуверенность, я уже гадаю, вдруг что-то еще имелось ввид не понял
2) В разборе: «Заметим, что решение остановить ли сейчас игру зависит только от текущего выигрыша или проигрыша игрока — история не имеет значе Почему? В условии этого нет, что если, например, «стратегия игрока» включает условие «стоп, если C проигрышей подряд?» тогда будет P(A,B,C). Еще м придумать несколько таких «стратегий». Переход к P(A,B) из условия задачи неочевиден. P.S. за что минусы, хоть аргументируйте

> **EgorK** 17 июля 2013 в 18:58
>
> 1. Я, честно говоря, не понимаю, как можно интерпритировать эту фразу таким образом. Если нам все время везет, то при чем тут вообще стратегия?
>
> 2. Потому, что никакая информация, кроме текущего выигрыша/проигрыша не влияет на дальнейшую игру. Либо матожидание дополнительного зараб выше нуля, либо нет.
>
> > **ttools** 17 июля 2013 в 21:49
> >
> > 1. В том и нестыковка. Задание «выведите максимальный ожидаемый выигрыш», но вывести надо не выигрыш при максимально благоприятных обстоятельствах, а матожидание
> >
> > 2.
> >
> > > Потому, что никакая информация, кроме текущего выигрыша/проигрыша не влияет на дальнейшую игру
> >
> > Этого в условии задачи нет. Из условия игрок может выбирать любую «стратегию». Например, выйти на следующем ходе с вероятностью u, вне зависимости от выигрыша, проигрыша или текущего результата, тоже стратегия.

coll3ctor 25 октября 2013 в 12:37

Странно, вроде Российские ВУЗы далеко не лучшие в мире (по рейтингу), а призёров из всяких Гарвардов, MIT'ов, Кембреджей тут и в помине нету, не говоря что почти все медали достаются Русским. В чём же дело?

> **EgorK** 25 октября 2013 в 12:50
>
> Одну из причин можно почитать здесь (на английском)

Колония. Глава 11: Рассказ доктора GT

333 0 3

Физики впервые установили контрфактическое квантовое соединение GT

1,7k 8 6

Джефф Безос: будущее бизнеса — машинное обучение, концентрация на интересах клиентов и быстрое принятие решений GT

742 2 0

Да будет фильм с Xamarin.Forms

731 10 0